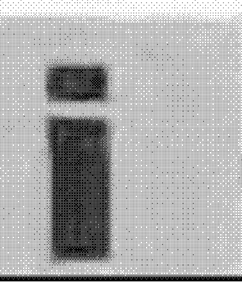
数学小丛书

12

多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类

江泽涵

π



科学出版社
www.sciencep.com

(O·1389.0101) 责任编辑：[illegible] 虹 / 封面设计：[illegible] / 责任印制：[illegible]

数学小丛书



ISBN 7-03-009423-8/O·1389

全套书定价 98.00 元（共18册）

数学小丛书 12

多面形的欧拉定理
和
闭曲面的拓扑分类

江 泽 涵

科 学 出 版 社

2002

内 容 简 介

本书第一章平凸多面形的欧拉定理(定理1)的证明,只需要中学立体几何的知识.在第二章里,通过这定理和证明的分析讨论,以及橡皮薄膜作成的图形的变形,引进拓扑变换的直观描写,从而得到定理1的推广,闭多面形的欧拉定理(定理2).在最后一章里,定理3和定理4圆满地解决由定理1所提出的一些问题,同时也给出闭曲面的拓扑分类.

图书在版编目(CIP)数据

多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类/江泽涵.—北京:科学出版社,2002

(数学小丛书)

ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ.多… Ⅱ.江… Ⅲ.拓扑-普及读物 Ⅳ.O189-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第010500号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年5月第一版 开本:787×960 1/32

2002年5月第一次印刷 印张2 插页:1

印数:1—5 000 字数:28 000

全套书定价:99.00元(共18册)

(如有印装质量问题,我社负责调换(科印))

出版说明

1956年，为了向青少年传播数学知识，科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛，出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》. 在20世纪60年代初，这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作，被北京市数学会编成小丛书，相继由不同的出版社出版，并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品，曾激发一代青少年学习数学的兴趣. 书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想，促进了无数中学生在求学的道路上健康成长. 当年这套小丛书的许多读者，现在已经成为学有所成的科学技术工作者，国家建设的栋梁之才. 当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动，现在已经得到蓬勃的发展. 我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来，历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算 π 之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经 300 多年终于在 20 世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

目　　录

1 凸多面形的欧拉定理

§1 定理的叙述和来源

1.1 什么是凸多面形

我们用中学立体几何教科书中的下面的这些定义.由若干个平面多边形所围成的封闭的立体称为**多面体**.这些多边形就称为多面体的**面**,这些多边形的边和顶点分别称为多面体的**棱和顶点**.多面体的表面称为**多面形**(在第2章以后,称为**初等多面形**);多面体的面、棱和顶点也称为这多面形的面、棱和顶点.当多面形在它的每一个面所决定的平面的同一侧,它就称为**凸多面形**.例如图1中的(a)到(d)都是凸多面形,图1中的(e)不是凸多面形.

如果1个凸多面形的所有的面都是全等的正多边形(等边和等角的平面多边形称为正多边形),并且所有的多面角都相等,这样的凸多

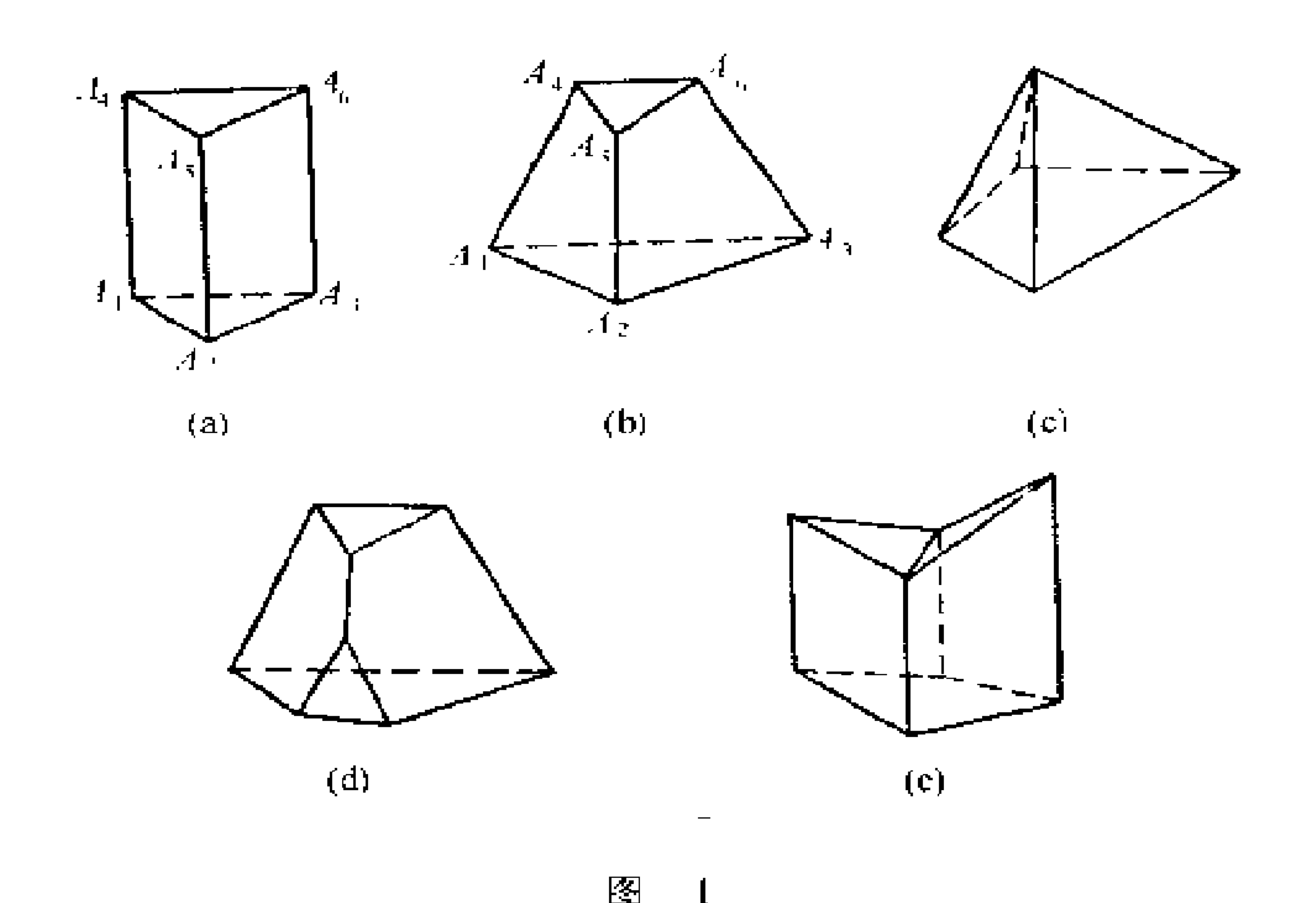


图 1

面形就称为**正多面形**.中学立体几何教科书中所说的正多面体的表面,就是正多面形.教科书中通常都有 5 种正多面体的图(如图 2),而且还说明了怎样用硬纸板制作这 5 种正多面形的模型.我们现在只看正多面体的表面,所以把图 2 中的 5 个图形都看作是正多面形.

1.2 欧拉示性数的定义和记号

设用字母 P 表示一个多面形,并用 V、E 和 F 分别表示 P 的顶点的、棱的和面的个数.然后

$$V - E + F$$

这个数是一个确定的整数,称为多面形 P 的欧

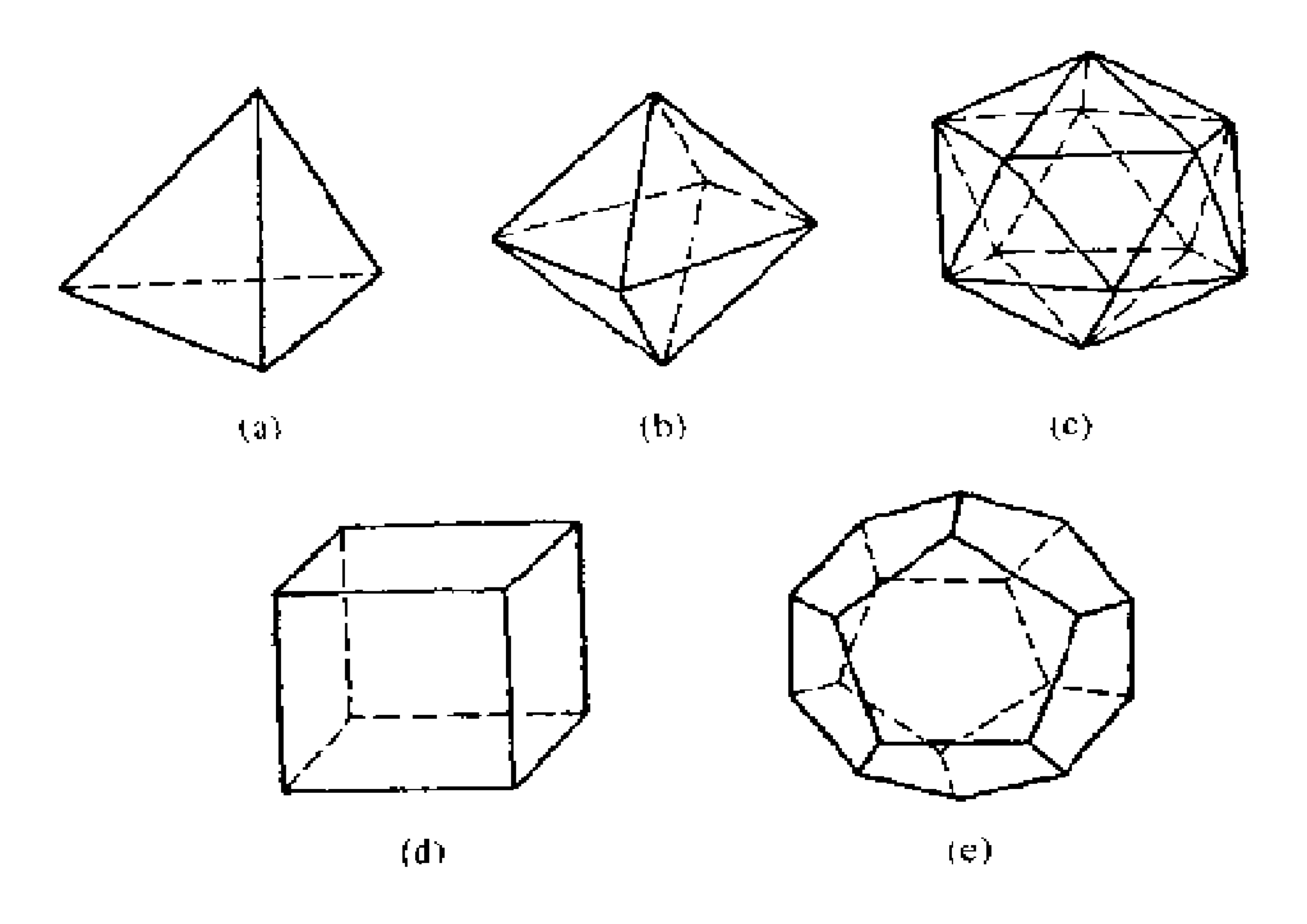


图 2

拉（L. Euler, 1707 ~ 1783）示性数，记作 $X(P)$，即

$$X(P) = V - E + F.$$

我们先来看图 1 中 5 个多面形的欧拉示性数 $X(P)$，并列于表 1.

表 1

多面形 P	V	E	F	$X(P)$
图 1(a)	6	9	5	$6-9+5=2$
图 1(b)	6	9	5	$6-9+5=2$
图 1(c)	5	8	5	$5-8+5=2$
图 1(d)	8	12	6	$8-12+6=2$
图 1(e)	8	13	7	$8-13+7=2$

再看图 2 中 5 个正多面形的欧拉示性数，并列于表 2.

表 2

正多面形 P	V	E	F	$X(P)$
图 2(a):正四面形	4	6	4	$4-6-4-2$
图 2(d):正六面形	8	12	6	$8-12+6=2$
图 2(b):正八面形	6	12	8	$6-12+8=2$
图 2(e):正十二面形	20	30	12	$20-30+12=2$
图 2(c):正二十面形	12	30	20	$12-30+20=2$

从上面两个表中的最右一栏可以看出这些多面形的欧拉示性数都是 2. 这些多面形中除掉图 1(e)是非凸的以外，其它的都是凸多面形. 我们很容易产生这样的问题：是不是所有的凸多面形的欧拉示性数都是 2 呢？下面是这个问题的解答.

1.3 定理 1(凸多面形的欧拉定理)

任意一个凸多面形 P 的欧拉示性数都是 2：

$$X(P) = V - E + F = 2.$$

在证明这个定理以前，我们先来分析一下它的结论. 这结论只是关于凸多面形的顶点个数 V、棱的条数 E 和面的个数 F 这样的 3 个整

数的一种组合，即$X(P)=V-E+F$，而不是其它的组合，例如不是$V+E+F$等.这结论的内容并不涉及凸多面形P的棱的长度、面的面积的大小以及面上的内角的大小；也就是说这结论的内容并不涉及凸多面形P的度量性质.这是定理1的特点，与中学里所见到的一般的几何定理不一样.

在证明这定理以前，我们还要先谈一谈欧拉是怎样发现这个定理的.

1.4 定理1的来源

我们可以设想欧拉发现这定理的过程大约是下面这样的.我们知道平面多边形的初步分类是用边的条数来分的，例如3条边的是三边形，4条边的是四边形，…，n条边的是n边形.它们的记号是用顶点的排列表示出来的，例如三边形用它的3个顶点排列$A_1A_2A_3$来表示，它是以A_1A_2，A_2A_3，A_3A_1为它的3个边.n边形的记法为$A_1A_2\cdots A_n$，以A_1A_2，A_2A_3，…，A_nA_1为边.很自然地会想到凸多面形或者可以用它的面的个数F来分类，而且把图1(a)这个多面形记作

$$A_1A_2A_3, A_4A_5A_6, A_1A_2A_5A_4,$$

$$A_2A_3A_6A_5, A_3A_1A_4A_6.$$

图 1(a)与图 1(b)这两个多面形的面数 F 同为 5，它们的记法也相同．因而会想到把它们归成一类而把它们称为**同构**(即结构相同)的多面形．图 1(c)的面数 F 虽然也是 5，它的记法却与前两个凸五面形不同，因为它的 5 个面中有 4 个三边形而只有 1 个四边形，前两个凸五面形的 5 个面却同是 2 个三边形和 3 个四边形．所以图 1(c)不能和前两个凸五面形归为一类．这说明了仅用面数 F 来作为凸多面形分类的依据是不够的．

既然要把凸多面形分类时，只看它们的面数 F 是不够的，那么就会想到在看它们的面数 F 的同时再看顶点数 V；行不行呢？这样倒是把图 1(c)与图 1(a)区别出来了；图 1(c)有 5 个面和 5 个顶点，而图 1(a)或图 1(b)有 5 个面和 6 个顶点．它们的面数 F 虽然同是 5，而它们的顶点数 V 却不一样．这好像说明了同时看凸多面形的面数 F 和顶点数 V，就可以区别出它们的结构，可以作为分类的依据似的．但只要再看下去，就知道这还是不够的．图 1(d)和图 2(d)这两个凸六面形有相同的面数 F，有相同的顶点数 $V=8$．但是图 1(d)的 6 个面中有两个三边形，两个四边形和两个五边形；可是图 2(d)的六个面都是四边形．它们的结构显然大不相同；它们不同类，虽然它们的面数 F 和顶点数

V 都相同.

凸多面形的面数 F 和顶点数 V 既然不够作为分类的依据,那么同时再加看棱的条数,是不是就行呢?还是不行,因为结构不同的图1(d)和图2(d)不但有相同的面数 $F=6$,相同的顶点数 $V=8$,还有相同的棱的条数 $E=12$.再试作各种面数 F 相等和顶点数 V 相等,但结构不同的凸多面形,结果必然是它们的棱数 E 也相等;而且更进一步,发现下面的事实:不论结构怎么样不同的两个凸多面形,尽管它们的面数 F 与顶点数 V 都不一样,只要当它们的面数 F 与顶点数 V 相加的和数 $V+F$ 相等时,它们的棱的条数 E 也必然相等,并且总满足关系式:$E=V+F-2$,也就是 $V-E+F=2$.凸多面形分类的这样的讨论,就引导我们发现定理1.

§2 定理1的证明

凸多面形的欧拉定理有种种不同的证法.我们现在要给出的证明是勒让德(A. M. Legendre,1752~1833)的证明.这需要球面几何学中的一个简单事实.先来证明这个事实,作为证明定理的准备工作.

2.1 球面多边形内角和公式

设平面 n 边形的 n 个内角是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

$(n \geqslant 3)$. 这 n 个内角的和 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 可以简写成 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$，即

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i + \cdots + \alpha_n,$$

其中 α_i 表示第 i 个角的弧度，$i = 1, 2, \cdots, n$，记号"$\sum$"表示和的意思，读作"西格码". $\sum_{i=1}^{n}$ 表示下标是 1 的项加到下标是 n 的项的总和. 中学平面几何教科书中都已经证明过：平面 n 边形的 n 个内角和是 $(n-2)\pi$，即

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi, \text{平面 } n(\geqslant 3) \text{ 边形.}$$

球面几何里也讨论球面上的 $n(\geqslant 2)$ 边形的内角和. 如果球的半径长度是 1，并且球面 n 边形的 n 个内角的弧度值也分别用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 表示，则球面 n 边形的诸内角和是：

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi + W, \text{球面 } n(\geqslant 2) \text{ 边形.} \quad (1)$$

式中的 α_i 表示第 i 个内角的弧度值，W 表示这球面 n 边形的面积. 关于这个公式(1)，还必须加以说明如下. 首先，球面多边形的边，必须是大圆(即以球心为圆心的圆)的圆弧. 其次，任意两个不同的大圆有两个交点，是球面上的一对

对径点,即球的同一条直径的两个端点,如图 3(a)中的点 A 和 A'. 最后,任意两个不同的大圆弧把球面分成四部分;其中的任一部分称为一个**月形**.它是一个球面 2 边形(平面上没有 2 边形). 图 3(a)中有阴影的部分是 1 个月形,也就是 1 个球面二边形,α 和 α' 是它的两个内角. 图 3(c)中有阴影的部分是 1 个球面三角形,α, β 和 γ 是它的 3 个内角. 此外,还要说明一下球面多边形内角的量法. 设要测量球面多边形的一个顶点 A 处的内角 α,如图 3(b). 夹这个角 α 的两个边必是大圆弧. 在顶点 A 处分别作这两个大圆的切线(射线即半直线)AB_1 和 AC_1. 平面角 $\angle B_1AC_1$ 的弧度就是角 α 的弧度.

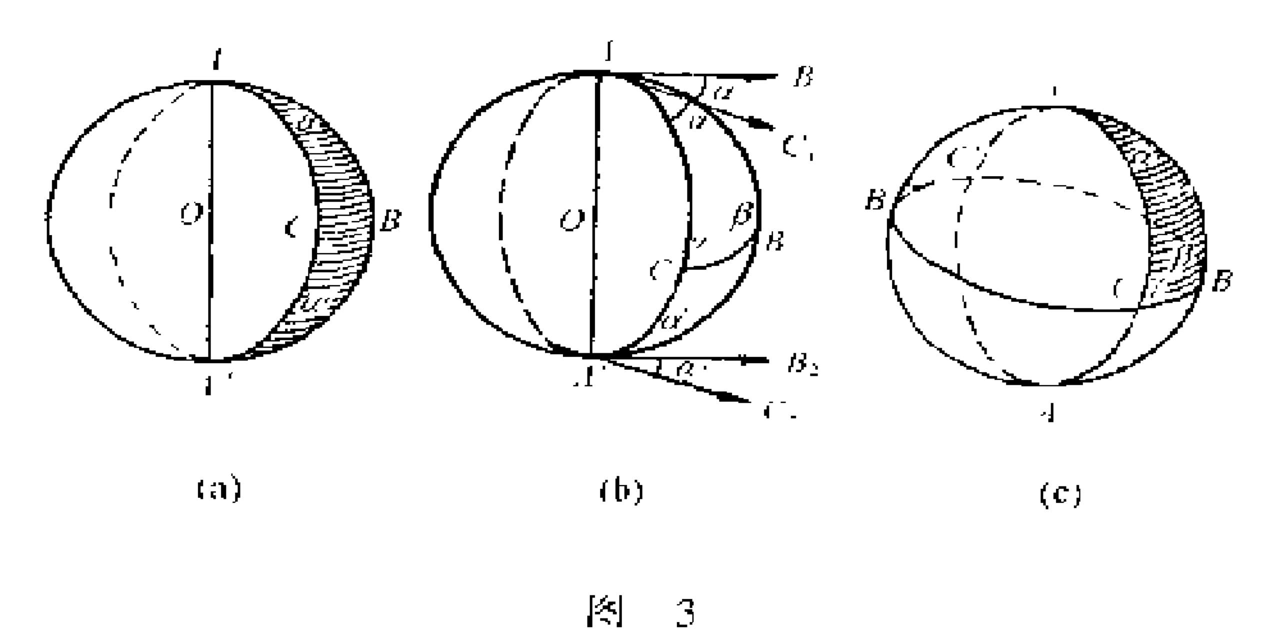


图 3

2.2 公式(1)的证明

在 $n=2$ 时,如图 3(a)中由两个大圆弧 ABA' 和 ACA' 所包围的球面上的部分,就是 1

个球面二边形，简记为 $ABA'CA$. 在 A 与 A' 处分别作同 1 个大圆 ABA' 的切线 AB_1 与 $A'B_2$，参看图 3(b)，因为都是与直径 AA' 垂直的线段，故这两切线平行，即 $AB_1 // A'B_2$. 同理，在 A 与 A' 处分别作同一个大圆 ACA' 的两切线 AC_1 与 $A'C_2$ 也平行，即 $AC_1 // A'C_2$. 从而两个半面角 $\angle B_1AC_1$ 与 $\angle B_2A'C_2$ 相等，也就是 $\alpha = \alpha'$，即 $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 2\alpha$. 这是公式(1)的左端，在 $n = 2$ 时的值. 公式(1)右端的第一项，在 $n = 2$ 时为零. 再计算公式(1)右端第 2 项 W 的值. 在这里，W 是月形的面积. 已知单位半径的球面积是 4π. 由于把半圆弧 ABA' 绕直径旋转一个周角 2π 时得球面，而旋转一个 α 角时得内角为 α 的月形，所以球面积与月形面积的比值，等于 $2\pi:\alpha$. 所以内角为 α 的月形面积 $W = 2\alpha$. 公式(1)的左右端相等，这证明了在 $n = 2$ 时公式(1)成立.

在 $n = 3$ 时，如图 3(c)中由三个大圆弧 AB（不是 $AA'B$，下同）、BC 和 CA 所包围的球面上的部分，就是 1 个球面三边形，它的 3 个内角是 α，β 和 γ. 所以公式(1)的左端：

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \alpha + \beta + \gamma.$$

下面我们来计算公式(1)的右端. 右端的第一项

是$(3-2)\pi=\pi$.右端的第二项,球面三边形的面积等于什么呢?为方便起见,用记号$\triangle ABC$表示这个球面三边形的面积.同理,由3个大圆弧,$A'B$,BC和CA'为边的球面三边形的面积用记号$\triangle A'BC$表示.从图3(c)可以看出

$\triangle ABC+\triangle A'BC=2\alpha$

(因为左端就是月形$ABA'CA$的面积),

$\triangle ABC+\triangle B'AC=2\beta$

(因为左端就是月形$BAB'CB$的面积),

$\triangle ABC+\triangle C'AB=2\gamma$

(因为左端就是月形$CBC'AC$的面积);

因为$\triangle C'AB$和$\triangle CA'B'$对于球心对称,所以

$$\triangle C'AB=\triangle CA'B',$$

因而第3式可以改写为

$$\triangle ABC+\triangle CA'B'=2\gamma.$$

把上面的第一式、第二式和改写后的第三式相加,得

$$\begin{aligned}2(\triangle ABC)+(&\triangle ABC+\triangle A'BC\\&+\triangle B'AC+\triangle CA'B')\\&=2(\alpha+\beta+\gamma).\end{aligned}$$

但是这和式左端的第二个括号中的4个面积,应等于2π.所以上式化简为

$$2(\triangle ABC) + 2\pi = 2(\alpha + \beta + \gamma),$$

即

$$\triangle ABC + \pi = \alpha + \beta + \gamma.$$

这证明了在 $n = 3$ 时公式(1)也成立.

跟证明平面 n 边形内角和公式一样,可以用数学归纳法证明在 $n > 3$ 时公式(1)也都成立.

2.3 定理 1 的证明

设有一个凸多面形 P. 已知它有 V 个顶点、E 条棱和 F 个面.

在凸多面形 P 所包围的空间内部,任取一点 O. 作一个以 O 为球心,半径是单位长的球面 S. 然后,P 上的任一点 x 与球心决定一条以 O 为端点的射线. 这射线必定与球面 S 相交于一点,而且只相交于一点 y. 这样,把 P 上的一个点 x,变成球面 S 上的一个相应点 y,就称为**球心投影**,并且 y 就称为 x 的**投影像**或**像**(图 4).

通过这样的投影,P 上所有的面的投影像,将不重叠地盖满球面;并且 P 的一个 n 边形面的投影像是球面上的一个球面 n 边形;最后,P 上的 F 个面、E 条棱和 V 个顶点,投影成球面上的 F 个球面多边形、E 条棱(都是大圆的弧)和 V 个顶点.

设第 j 个球面多边形是 n_j 边形,它的 n_j

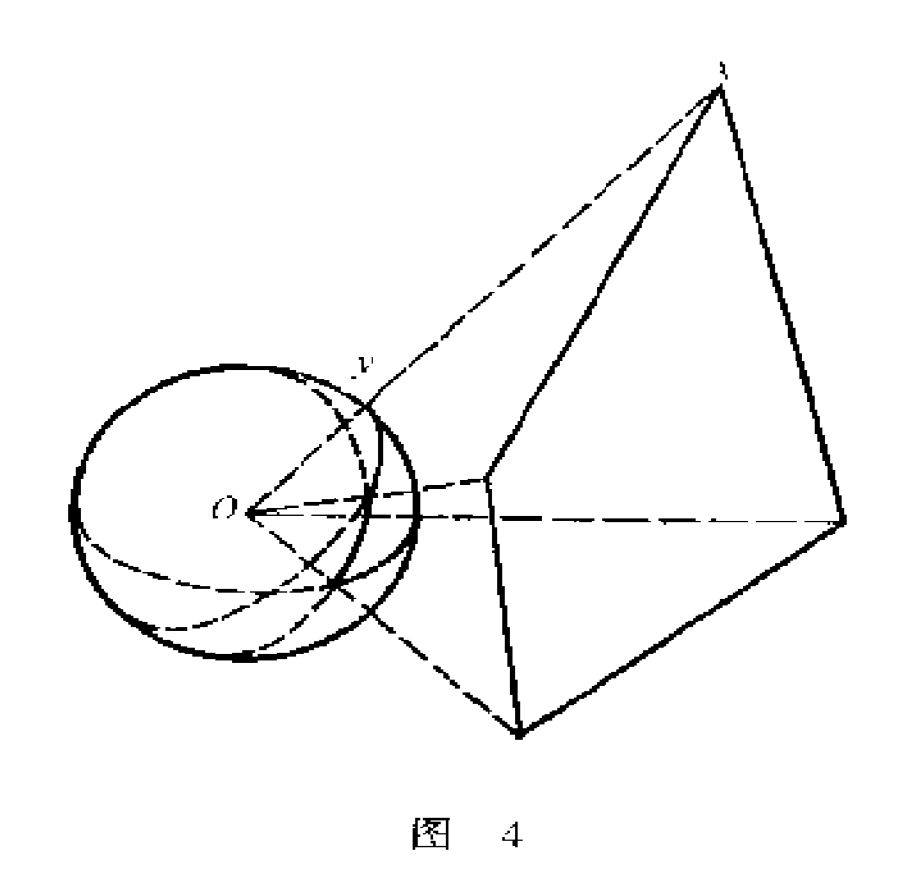


图 4

个内角是 $\alpha_{j1}, \alpha_{j2} \cdots, \alpha_{ji}, \cdots, \alpha_{jn_j}$，它的面积是 W_j. 若用 $\sum\limits_{i=1}^{n_j} \alpha_{ji}$ 表示这 n_j 边形的 n_j 个内角的和，则从公式(1)有

$$\sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ji} = (n_j - 2)\pi + W_j,$$

其中 $j = 1, 2, \cdots, F$. 因为有 F 个球面多边形，所以有 F 个这样的等式. 把这 F 个等式相加，有

$$\sum_{j=1}^{F} \left(\sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ji} \right) = \sum_{j=1}^{F} \left[(n_j - 2)\pi + W_j \right]$$

$$= \pi \sum_{j=1}^{F} n_j - 2\pi F + \sum_{j=1}^{F} W_j. \tag{2}$$

上式左端是球面上的所有球面多边形内角的总和，也就是拼成为围绕球面上那 V 个顶点的周角的总和. 按照球面多边形内角的量法，一个周角是 2π，故上式左端的值是 $2\pi V$，即

$$\sum_{j=1}^{F} \left(\sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ji} \right) = 2\pi V.$$

式(2)右端第一项的因子 $\sum_{j=1}^{F} n_j$ 是 F 个球面多边形边数的总和. 但在这个总和中，球面上那 E 条棱的每一条都计算了两次，因为每条棱是两个多边形的公共边；所以这个因子的值是 $2E$，即

$$\sum_{j=1}^{F} n_j = 2E.$$

式(2)右端的第三项等于球面积 4π，即

$$\sum_{j=1}^{F} W_j = 4\pi,$$

因为 F 个球面多边形是正好不重叠地盖满球面.

把各项的等量代入式(2)，即有

$$2\pi V = 2\pi E - 2\pi F + 4\pi,$$

化简为

$$V - E + F = 2.$$

这就完成了定理 1 的证明.

§3 一个推论和一个问题

3.1 推论

推论 恰有 5 种正多面形.

证明. 立体几何教科书里说明了图 2 中的 5 个图形的作法,因而证明了至少有 5 种正多面形.所以要证明我们的推论,只要再证明不会再有其它种的正多面形,即再证明至多有 5 种正多面形.

为着证明至多只有 5 种正多面形,我们先注意每一个正多面形还有下述的非度量性质:任一正多面形的每一个面都是 $n(\geqslant 3)$ 边形,而且每一个顶点都是 $m(\geqslant 3)$ 条棱的公共端点.图 2 中的每一个图的 n 和 m 如表 3.

表 3

	(一)	(二)	(三)	(四)	(五)
n	3	3	3	4	5
m	3	4	5	3	3
F	4	8	20	6	12

表中最下一栏中的 F 仍旧表示面的个数. 所以如果我们能证明下一节中的命题, 我们就证明了至多有 5 种正多面形, 即证明了上述推论.

3.2 命题 1

命题 1 如果一个凸多面形的每一个面都是 $n(\geqslant 3)$ 边形, 而且每一个顶点都是 $m(\geqslant 3)$ 条棱的公共端点, 则 n 与 m 只有如表 3 中所列 5 种可能的组合.

证明 设这个凸多面形有 V 个顶点, E 条棱, F 个面.

因为 E 条棱的每一条是两个 n 边形的公共边, 故在 F 个 n 边形的边数总和 nF 的计算中, 是把 E 条棱的每一条都计算了两次, 从而有

$$nF = 2E.$$

又因为每一条棱上有两个端点(顶点), 而已知每一个顶点处都有 m 条棱, 故在 V 个 m 条棱的棱数总和 mV 的计算中, 也是把每一条棱都计算了两次, 从而也有

$$mV = 2E.$$

根据定理 1, 又有 $V - E + F = 2$. 将这个式子两端均乘以 $2m$ 后, 得

$$2mV - 2mE + 2mF = 4m.$$

上式左端中的首项是 $2mV = 2(2E) = 2nF$，第二项是

$$2mE = mnF.$$

把这两项的值代人上式中，有

$$(2n - mn + 2m)F = 4m. \tag{3}$$

因为这式中的 F 和 m 都是正数，故有

$$nm - 2n - 2m < 0,$$

即

$$(n - 2)(m - 2) < 4.$$

很容易看出，满足这不等式的组合 n 与 m 只可能是表 3 中所列出的 5 种. 这就完成了本命题的证明.

读者还可以由式(3)算出这 5 种情形下的 F 的 5 个值，恰如表 3 中最下一栏中所列出的.

3.3　定理 1 所引起的问题

定理 1 是说凸多面形的欧拉示性数是 2. 但图 1(e)所表示的是非凸的多面形，而它的示性数也是 2. 这说明定理 1 的结论断然不局限于凸多面形.

从这事实，自然会引起这么一个问题：究竟什么样的多面形的欧拉示性数是 2 呢？下一章里将作进一步的探讨.

2 闭多面形的欧拉定理

在前一章的末尾我们提出了下述问题：究竟什么样的多面形的欧拉示性数是2呢？本章的目的是说明这问题的解答——后面的定理2；我们把这解答称为闭多面形的欧拉定理.

§1 闭多面形

现在将第1章§1.1所定义的多面形称为**初等多面形**.这个定义是利用空间中的立体来给出的.在那里我们也提到了，立体几何教科书里说明过用硬纸板制作正多面形模型.现在这里要根据模型作法的精神，提出下面的闭多面形的定义，以替代前一章的初等多面形的定义.

闭多面形的定义 一个闭多面形是由有限个平面多边形（不必凸的）拼合而成的一个图形（这些平面多边形仍旧称为闭多面形的**面**，它们的边和顶点仍旧分别称为闭多面形的**棱**和**顶点**），其拼合方式须满足下面4个条件：

(1)它的每两个顶点可以由它的一些棱所组成的折线连接起来;

(2)它的每两个面或者没有公共点,或者恰有一个公共的顶点,或者恰有一条公共的棱;

(3)它的每条棱恰是它的两个面的公共棱;

(4)它的每个顶点都是**锥形的顶点**,即每一顶点处的棱和面可记为

$$l_1, A_1, l_2, A_2, l_3, \cdots, l_n, A_n, l_1.$$

这一串中的棱和面都以这顶点为一个顶点,这 n 条棱两两不同,这 n 个面两两不同,每个面都以左右邻的棱为它的两个边.例如图1(a)的顶点 A_1 处的这样的一串是

$$A_1A_2, A_1A_2A_3, A_1A_3, A_1A_3A_6A_4,$$

$$A_1A_4, A_1A_4A_5A_2, A_1A_2.$$

读者可以从下面的说明来了解定义中诸条件的意义.因为条件(1),图1中(a)和(b)在一起,不能算作一个闭多面形.因为条件(2),一个闭多面形的两个面的拼合可以如图5中的(b),但不能如图5中的(a).因为条件(3),图6不是闭多面形.图7不是闭多面形,因为它在顶点 V 处不满足条件(4).但请读者注意,图7是第1章中所定义的初等多面形.

另一方面.容易验证,图1和图2中的10个

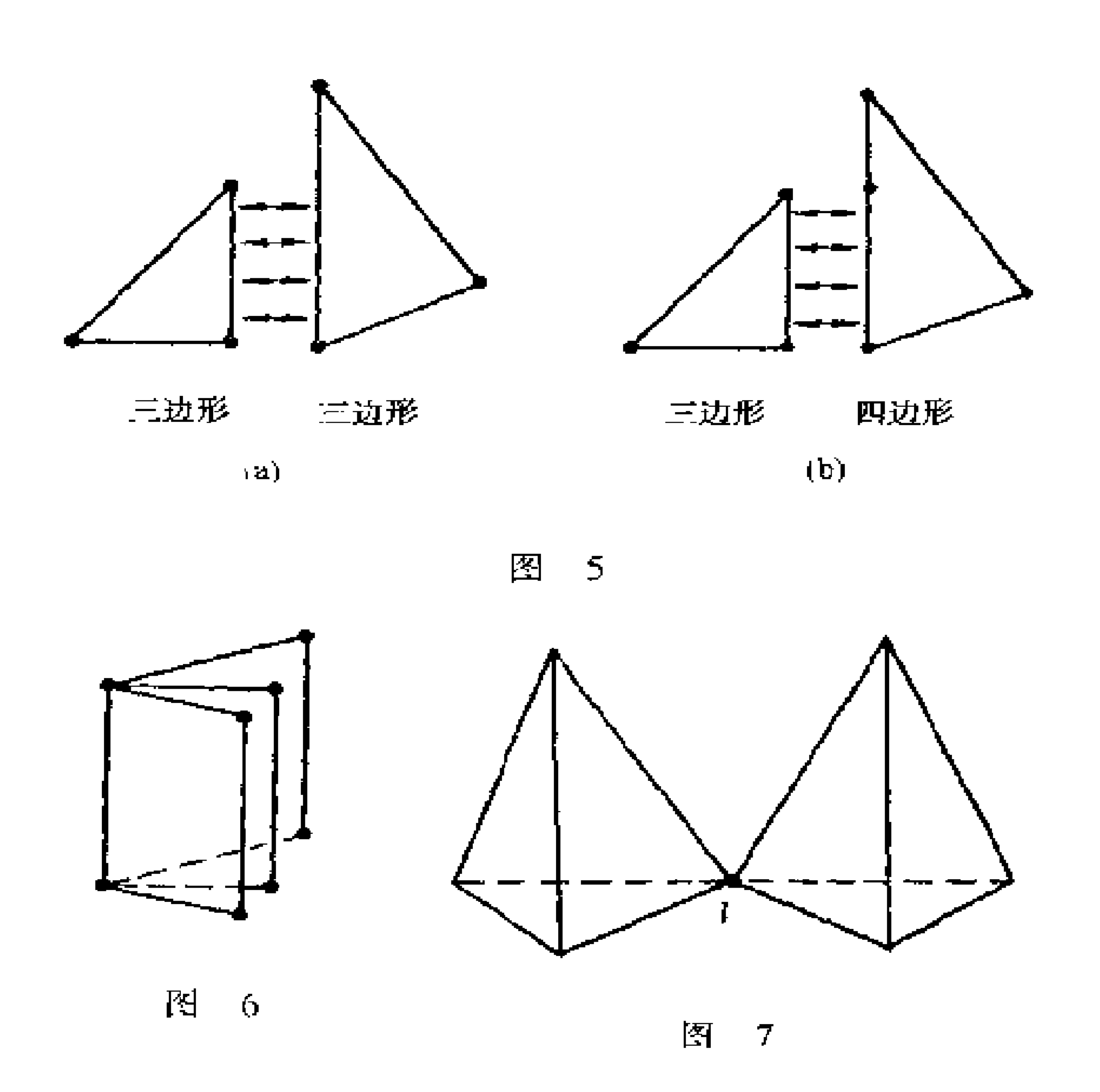


图 5

图 6

图 7

图形，以及图 8 和图 9 都是闭多面形. 这里的图 9 是由 8 个长方形(如围屏)和两个非凸的 8 边形(底和顶)拼成的.

我们还必须比较初等多面形和现在的闭多面形. 刚才已举例说过，有的初等多面形是闭多面形(图 1,2,8,9 中所有图形)，有的不是(图 7). 所以初等多面形和闭多面形这两种对象范围是有出入的. 如果一个闭多面形在通常空间(即我们日常所认识的空间，也即三维欧儿里得

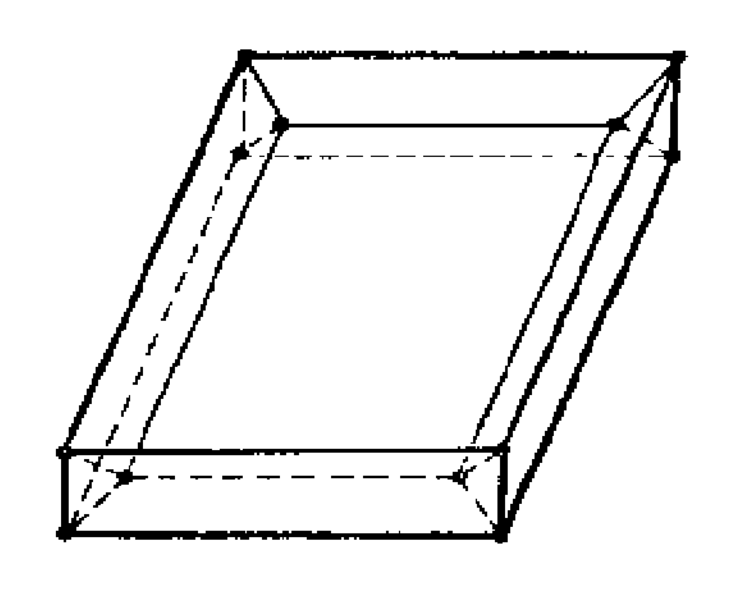


图 8 镜框的表面

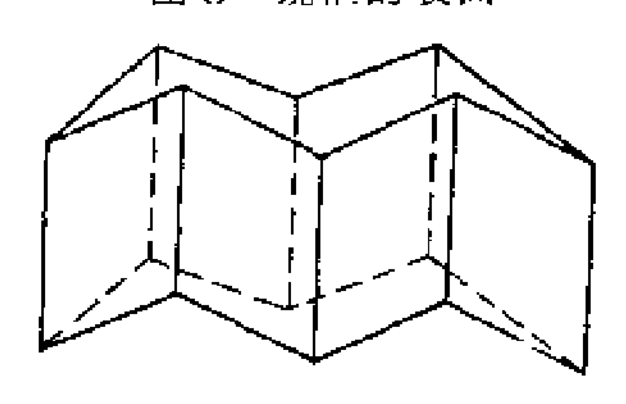


图 9

空间)中,就也可以像在第 1 章中一样,判断它是否凸多面形;初等多面形中的凸多面形和闭多面形中的凸多面形是一致的.在下一章中我们还要谈到一些闭多面形,它们不能安置在通常空间中,而能安置在四维欧几里得空间中;它们当然不会是初等多面形了.所以闭多面形的定义比起初等多面形的定义来,不但在理论上明确化,以便于在本章中作数学的推理,而且还把对象范围扩大了.

§2 从球心投影到拓扑变换

2.1 定理 1 的证明的讨论

定理 1 的假设是"一个闭多面形 P 是凸的",结论是"这闭多面形 P 的欧拉示性数是 2". 证明的关键是"存在一个球心投影,使这凸多面形 P 的诸面的投影像不重叠地盖满球面". 换句话说,证明的是:因为 P 是凸的,所以取 P 所包围的内部的任一点作球心时,这球心的投影使 P 的诸面的投影像不重叠地盖满球面;再因为存在一个这种的球心投影,然后推证出 P 的示性数是 2. 由此可见,实际上不必问闭多面形 P 是否凸的,只要问 P 所包围的内部是否有一个点可以作为球心投影的球心,使得 P 的诸面的投影像不重叠地盖满球面;如果有(例如对于图 1(e)中这非凸的闭多面形,容易看出有这样的点),则 P 的示性数是 2. 所以我们的证明实际上适用于图 1(e)这类的非凸的多面形;也就是说,定理 1 并没有把所能证明的事实全部表达出来.

2.2 从球心投影到图形的橡皮变形

另一方面,容易看出,如果考虑的是图 8 或图 9 这样的闭多面形,它的内部却没有这样的

一个点可以作为球心投影的球心，使得它的诸面的投影像不重叠地盖满球面. 图 8 的示性数是零，不合于定理 1 的结论；我们不谈图 8. 但图 9 的示性数是 2；我们能否稍微改变我们的证明，使得它也能够适用于图 9 这类闭多面形，因而得到比定理 1 更多的结果呢？能够的，我们进行如下.

考虑任意一个图形 P. 设想 P 是用橡皮薄膜作成的，可以伸缩. 任意地改变橡皮薄膜的形状，把图形 P 变成图形 P'；但要求把 P 的一点变成 P' 的一点，不把 P 的两点粘合成 P' 的一点，不把 P 的任一小块撕破. 我们把 P 变成 P' 的这种图形的改变称为一个**橡皮变形**，把 P' 称为 P 的一个**橡皮变形像**. 如果 P 是一条直线段或一个平面多边形，P' 就分别称为一条**弧**或一个**弯曲的多边形**；这时候 P' 可以不在一个平面上. 我们把直线段看作弧的特例，平面多边形看作弯曲的多边形的特例.

如果 P 是 §1 里所定义的闭多面形，而且 P' 是 P 的一个橡皮变形像，我们就分别把 P 的面、棱和顶点的这个橡皮变形像称为 P' 的面、棱和顶点. 因而 P' 的面的拼合方式完全跟 P 的面的一样，满足 §1 里定义的 4 个条件. 因此，我们把闭多面形 P 的任一个橡皮变形像 P' 还称为闭多面形. 这就等于说，我们把 §1 里的闭多面形

的定义作了一些改变:闭多面形的面现在可以是弯曲的多边形,不限于只是平面多边形. P' 因而也有欧拉示性数. 显然,橡皮变形不改变欧拉示性数,即 P 和 P' 的欧拉示性数相同.

定理 1 的证明中的一个球心投影实际是一个橡皮变形,它把凸多面形 P(或如图 1(e)中的闭多面形)的点 x 绷到球面的点 y(图 4). 把 P 绷成球面上的一个闭多面形 P'; P' 不重叠地盖满球面.

我们已经说过:没有球心投影能使图 9 中的这闭多面形 P 的诸面的投影像不重叠盖满球面. 现在我们不限于用球心投影,可以先用一个橡皮变形把图 9 中的 P 变成一个凸多面形,再用一个橡皮变形(这次是球心投影)把这个凸多面形变成绷在球面上的一个闭多面形 P'. 继续施行两个橡皮变形的总结果还是一个橡皮变形. 因为凸多面形或图 8 这样的图形(注意:这里是说图 8 这样的图形,不是只说图 8;图 8 的示性数是 2,从图形就可以看出来的) P 的橡皮变形像 P',是由球面上的(以大圆弧为边的)球面多边形拼合而成的闭多面形,根据定理 1 的证明,P' 的示性数是 2;又因为橡皮变形不改变示性数这一事实,P 的示性数是 2. 这就证明了下面的,比定理 1 还广的命题.

命题 2 如果一个闭多面形能经过一个橡

皮变形，变成绷在球面上的（即不重叠地盖满球面的）、以大圆弧为棱的闭多面形，它的欧拉示性数就是 2.

2.3 从橡皮变形到拓扑变换 定理 2（闭多面形的欧拉定理）

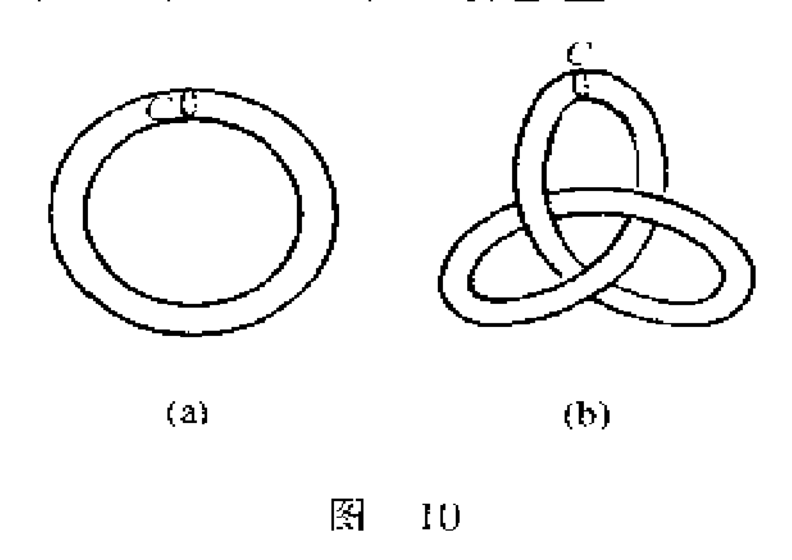
我们还要把命题 2 在两个方面推广：把橡皮变形推广成“拓扑变换”，而且绷在球面上的闭多面形不限于以大圆弧为棱；即我们还要提出下面的比命题 2 还要广的定理：

定理 2（闭多面形的欧拉定理） 如果一个闭多面形，能经过一个拓扑变换，变成绷在球面上的（即不重叠地盖满球面的）闭多面形，它的欧拉示性数就是 2.

定理 2 的证明是本章的内容. 现在先说明什么是拓扑变换. 我们不用数学的术语，还只形象地从橡皮变形来说明. 设想图 10(a)中的环面是橡皮薄膜作成的、沿着环面上的闭曲线 c 把环面剪开（把 c 的每一点剪成两点），把剪开后得到的管子打一个结（这是一个橡皮变形），再把剪开处粘合恢复原状（把剪开一点所得到的两点粘合成原来的一点），得到图 10(b)中的结. 这样把任意一个图形 P 变成图形 P' 的图形的改变（剪开，橡皮变形，复原）称为一个**拓扑变换**，P' 称为 P 的一个**拓扑像**. 跟谈橡皮变形像时一样，闭多面形 P 的拓扑像 P' 仍旧是闭多面

形，它的面和棱分别是弯曲的多边形和弧．橡皮变形没有剪开和复原，是拓扑变换的特例．

设想图 8 中的镜框的表面是橡皮薄膜作成的．经过橡皮变形，很容易把它变成绷在环面上的一个闭多面形；经过拓扑变换（但非经过橡皮变形），也可以把它变成绷在图 10(b)中的结上的一个闭多面形．很明显，拓扑变换也不改变欧拉示性数．因为橡皮变形是拓扑变换的特例，所以定理 2 比命题 2 还广．因为命题 2 已经比定理 1 广，所以定理 2 也比定理 1 广．等到将来有了定理 3 和定理 4，我们还将知道，关于闭多面形，不会有比定理 2 还广的定理．



(a)　　(b)

图　10

图形的、经过拓扑变换而不改变的性质称为**拓扑性质**[1]，例如闭多面形的欧拉示性数．线段的长度和多边形的面积以及角度等度量性质，都容易看出不是拓扑性质．定理 2 是一个只

[1] 拓扑学就是研究图形的拓扑性质的几何学．

有关于拓扑性质的定理，我们将在下一节里给出它的一个拓扑的证明，即只牵涉到拓扑性质的证明.

§3 定理2的拓扑证明 网络

3.1 定理2′

因为拓扑变换不改变欧拉示性数，所以定理2中的闭多面形和它经过拓扑变换所变成的、绷在球面上的闭多面形的示性数相同. 所以定理2就与下面叙述的定理2′完全相同.

定理2′ 每一个绷在球面上的闭多面形的欧拉示性数是2.

以约当定理为出发点，加上球面上"网络"的研究，才能证明定理2′. 后者留在下一节里谈，本节只谈约当定理.

约当定理 球面上的任一条简单闭折线 G 把球面分成两块. 而且 G 上的任一条弧的两侧附近的两点分属于这两块.

先说明这定理的意义. 所谓球面上的一条简单闭折线 G，是一个多边形周，经过一个拓扑变换变成的、绷在球面上的图形. 它是由若干条弧连接而成的. 所谓 G 把球面分成两块，就是说，如果沿着 G 把球面剪开，结果球面被分成两块，不多不少.

从球面图形的直观看，这约当定理是明显地正确的；长久以来都认为是无须证明的事实．数学家约当（1838～1922）是第一个陈述这条定理，而且指出需要证明的人．证明这条定理的努力，在推动数学理论的发展上起了很大的作用．这条定理的证明很多，需要一些中学里未学过的数学概念，都不是很简短的．它是一条拓扑定理，即不牵涉到长度、角度和面积等度量性质的定理．我们在这个小册子里不能证明它．

3.2　网络　命题3、命题4

1个网络是空间中由有限个点（称为**网络的顶点**）和有限条弧（称为**网络的棱**）拼合而成的图形，其拼合方式须满足下面两个条件：

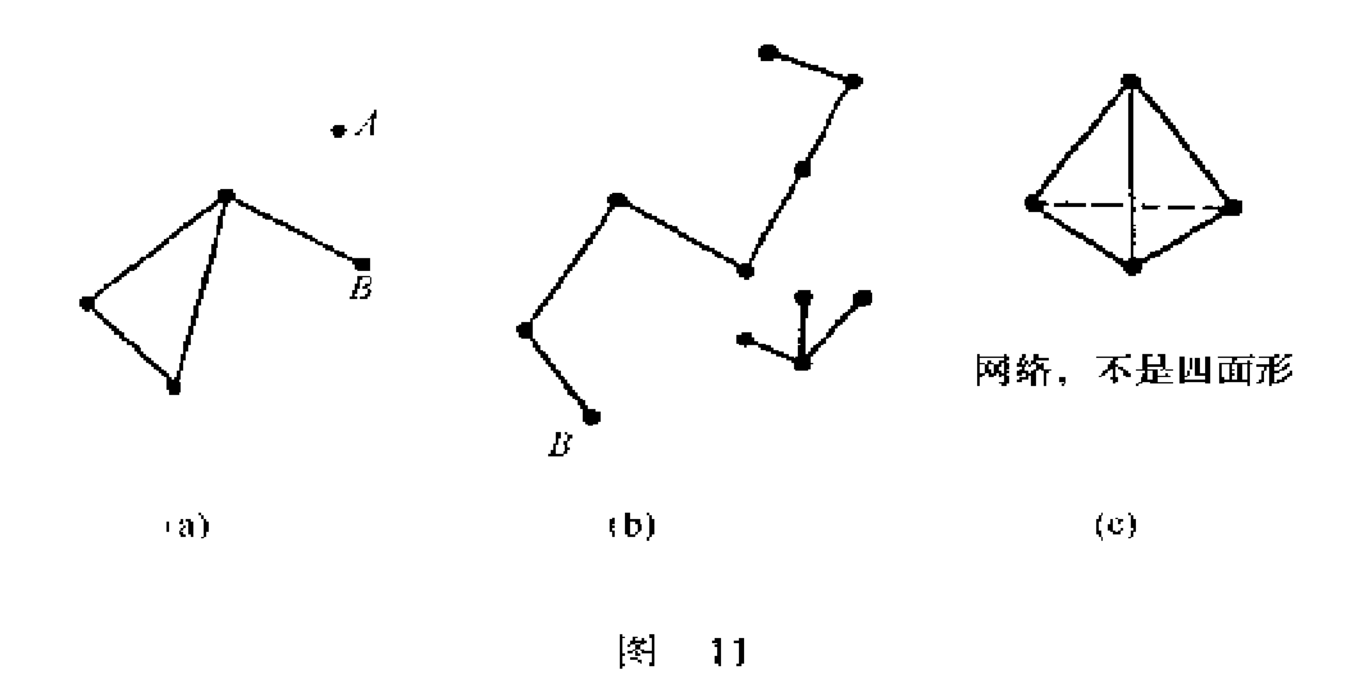
（1）它的每一条棱连接它的两个不同的顶点；

（2）它的任意两条棱或者无公共点，或者只有一个公共的顶点．

孤立的顶点指的是图11（a）中的那种顶点A；**自由的顶点**指的是图11（a）和（b）中的那种顶点B．图11（a）和（b）各有两个**分支**，图11（c）只有一个分支．

闭多面形的顶点和棱所组成的图形都是网络，而且还满足下面两个条件：

（3）它的每一个顶点是它的至少两条棱的公共顶点（见闭多面形的定义中的条件（4））；



(a)　　(b)　　(c)

图　11

(4)它的每两个顶点可以由它的一些棱所组成的折线连接起来(见闭多面形的定义中的条件(1)).因而它无孤立的顶点,无自由顶点,只有一个分支.

命题3　如果一个网络含有棱但无自由顶点,它就含有1条**简单闭折线**.

证明　由假设,存在着1个顶点A_1是棱A_1A_2的端点.因A_2不可能是自由顶点,必定是不同于A_1A_2的棱A_2A_3的端点.因为只有有限个顶点,继续这样下去一定会遇到一个顶点A_{n+1},它第一次与前面的一个顶点设为A_r重合.故有一个简单闭折线$A_rA_{r+1}\cdots A_{n+1}$.

命题4[①]　如果球面上1个网络G共有V

---

① 这个命题的证明是柯西(A. L. Cauchy, 1789－1857)的.

个顶点，E 条棱和 C 个分支，而且把球面分成 F 块，就有

$$V - E + F = 1 + C.$$

证明 对于网络 G 的棱的条数 E 用归纳法. 当 $E=0$ 时，显然有 $C=V$，$F-1$，故定理成立.

设 G 有 $E=n+1$ 条棱，而且对于有 n 条棱的网络 G'，定理成立；现在来证明这个定理对于 G 也成立. 分两种情形：(1) G 有自由顶点 x；(2) G 无自由顶点.

情形 1 设 G 的以自由顶点 x 为端点的棱的另一端点是 x'. 从 G 中消去棱 xx'，但保持顶点 x 和 x'，把这样得到的网络称为 G'. 设 G' 的顶点数和分支数分别是 V' 和 C'，而且 G' 把球面分为 F' 块. 容易看出：$V'=V$，$C'=C+1$，$F'=F$. 由假设已知 $V'-n+F'=1+C'$，故有

$$\begin{aligned} V - E + F &= V - (n+1) + F \\ &= V' - n + F' - 1 \\ &= 1 + C' - 1 = 1 + C. \end{aligned}$$

情形 2 G 无自由顶点，由上面的命题 3 可知 G 必含有一条简单闭折线. 消去这条简单闭折线上的一条棱，得到网络 G'. 设 G' 的顶点数和分支数分别是 V' 和 C'，而且 G' 把球面分

为 F' 块. 容易看出: $V' = V$, $C' = C$, 而从约当定理可知 $F' = F - 1$. 由假设已知 $V' - n + F' = 1 + C'$, 故有

$$
\begin{aligned}
V - E + F &= V - (n + 1) + F \\
&= V' - n - 1 + (F' + 1) \\
&= V' - n + F' = 1 + C' = 1 + C.
\end{aligned}
$$

这就证完了命题 4.

3.3　定理 2 的拓扑证明

我们已经说过, 我们只需要证明定理 2′(§3.1). 设绷在球面上的一个闭多面形 P 的顶点和棱作成网络 G, 它共有 V 个顶点, E 条棱和 C 个分支, 而且把球面分成 F 块. 因而 P 的顶点、棱和面的个数分别是 V、E 和 F. 在 §3.2 里已经说过 $C = 1$. 于是命题 4 给出了 P 的欧拉示性数是 2, 这就证明了定理 2′, 因而也证明了定理 2.

因为定理 2 包含了定理 1, 所以这里也是定理 1 的第二个证明, 既然约当定理以及定理 2′的证明都只牵涉到拓扑性质, 这个证明因而也是定理 1 的一个拓扑证明, 不同于第 1 章中的那个用到度量性质的证明.

§4 一个应用:地图五色定理

4.1 关于定理 2 的一个注记

为着证明地图五色定理的方便起见,我们要在这里对于定理 2 加一个注记.

在第 1 章 §2.1 和 §2.2 里我们提到过球面 2 边形,即月形. 但我们的闭多面形,不论是本章 §1 里的或 §2 里的,都不会有 2 边形的面;而且 §3 里的网络满足条件(2),它把球面分成块时也不会出现 2 边形的面.

设绷在球面上的闭多面形 P 的一部分如同图 12(a),其中的顶点 A 恰是两条棱的公共

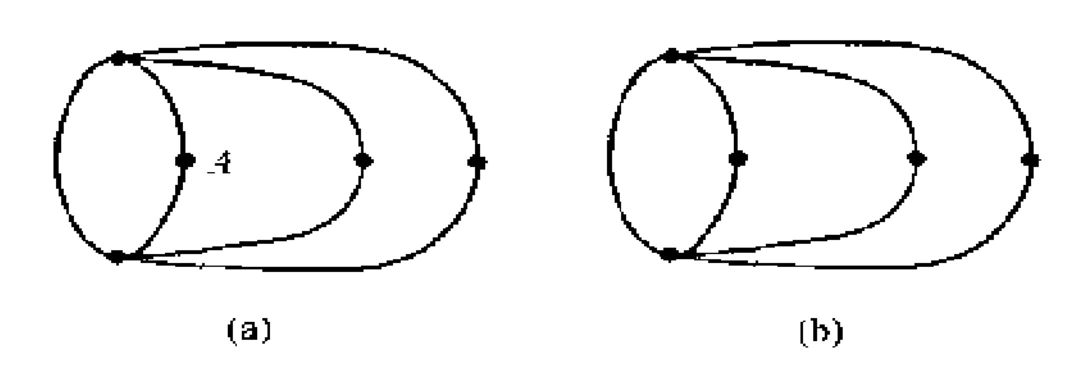


图 12

端点. 把顶点 A 不看作是顶点,图 12(a)就变成图 12(b),其中出现了一个 2 边形. 这两个图形的欧拉示性数相同,因为这样的消去一个顶点是同时把顶点个数和棱的个数都减少 1,但不改变面数. 我们可以把在闭多面形 P 中出现的

所有像 A 这样的顶点一个一个地消去；结果从 P 得到一个新图形，记作 P'. 现在的 P' 有下列三个特点：1)它可以有二边形，2)它的每一顶点至少是它的三条棱的公共端点，3)它的欧拉示性数仍旧是 2.

在本节(§4)里，我们也把这样的图形 P' 称为闭多面形，而且只限于讨论这样的闭多面形 P'.

4.2 五色定理的叙述

五色定理 每一幅地图可以至多用五种颜色正确地染色.

我们先来谈谈什么叫做正确地染色.

正确地染色 地图上每个区域都用一定的颜料染了色，而任意两个相邻的(即有公共棱为边界的)区域所染的颜色都不相同；这样，我们就说这个地图是正确地染了色.

每一幅地图都可以看成为绷在球面上的(即不重叠地盖满球面的)一个闭多面形(参看§4.1). 地图上区域与区域的分界线是闭多面形的棱，各分界线的交点是闭多面形的顶点，而每一个区域是闭多面形的一个面(即弯曲的多边形). 所以每一幅地图都有示性数. 根据定理 2，这个示性数是 2.

4.3　正规的地图

如果一个地图上的每个顶点都恰巧会聚3条边界，我们就称它为**正规的地图**.

对于会聚着多于3条边界的顶点（参看§4.1），画一个足够小的圆，把这种顶点圈起来（如图13(a)），并把这个闭的小圆区域归并到围绕着这个顶点的一个区域里（如图13(b)）. 这样作了之后，我们将得到一个新地图，把原来

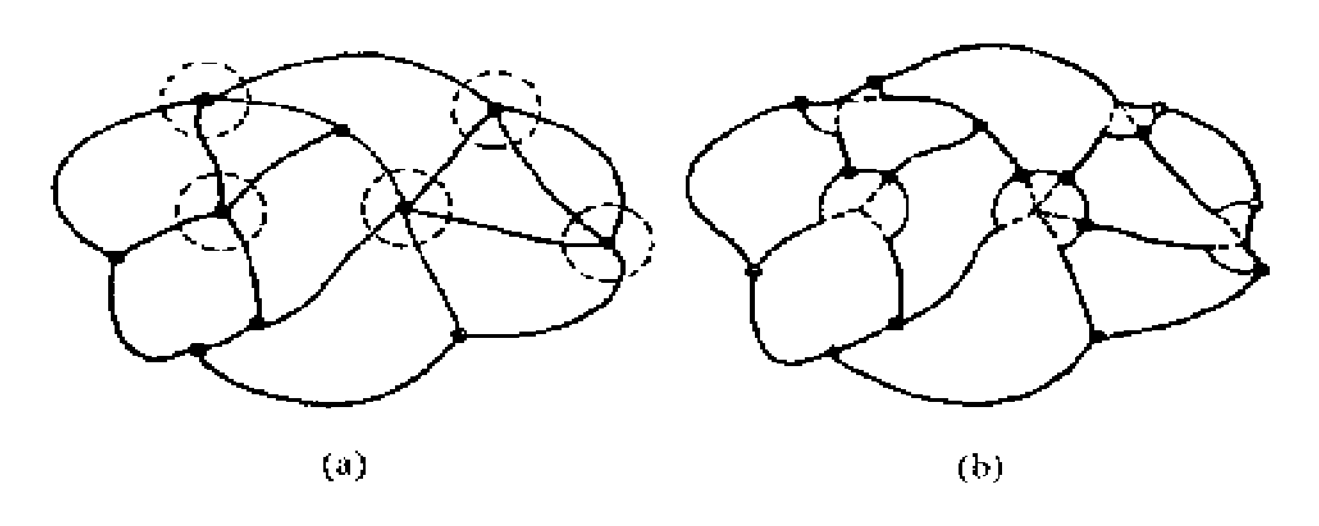


图　13

的、会聚着多于3条边界的每一个顶点，都换成一些恰巧会聚3条边界的顶点. 新地图的区域数还和原来的一样. 如果对于这个新地图，它是正规的，能至多用5种颜色把它正确地染色；那么，把这些小圆收缩成点之后，我们就得到原来的地图所需要的颜色. 所以只需要证明：正规的地图能至多用5种颜色正确的染色.

我们先利用闭多面形的欧拉定理证明下面的命题.

4.4 命题 5

命题 5 每一个正规的地图必定至少含有 1 个边数少于 6 的区域.

证明 设用 F_n 表示正规地图中 n 边形的区域的个数. 如果这正规地图总共有 F 个区域,则有(参看 §4.1)

$$F = F_2 + F_3 + F_4 + \cdots. \tag{1}$$

因为每条边有两个端点,而每个顶点是 3 条边的公共端点,如果这地图总共有 E 条边(弧)与 V 个顶点,则有

$$2E = 3V. \tag{2}$$

又因为 n 边形的区域有 n 个顶点,并且每个顶点属于 3 个区域,所以有

$$3V = 2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \cdots \tag{3}$$

由欧拉定理(参看 §4.1) $V - E + F = 2$,有 $6V - 6E + 6F = 12$. 从(2)可知 $6V = 4E$,从而有 $6F - 2E = 12$. 因此从(1)与(3),得

$$6(F_2 + F_3 + F_4 + \cdots)$$
$$-(2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \cdots) = 12,$$

或

$$(6-2)F_2 + (6-3)F_3 + (6-4)F_4$$

$$+(6-5)F_5+(6-6)F_6$$
$$+(6-7)F_7+\cdots=12.$$

式中左端至少有一项必定为正项,也就是这 4 个数 F_2,F_3,F_4,F_5 中必有一个不为零,这就证明了这个命题.

4.5 五色定理的证明

设 M 是球面上的任一个有 n 个区域的正规的地图.由上面的命题得知: n 个区域中至少有一个区域,它的边数少于 6.我们分两种情形来考察.

情形(1) M 包含一个二边形或三边形或四边形的区域 A.将 A 和与它相邻区域中的一个区域的公共边去掉,也就是将 A 和与它相邻区域中的一个区域合并,结果将得到一个区域数为 $n-1$ 的正规地图 M'.如图 14 所示,是区

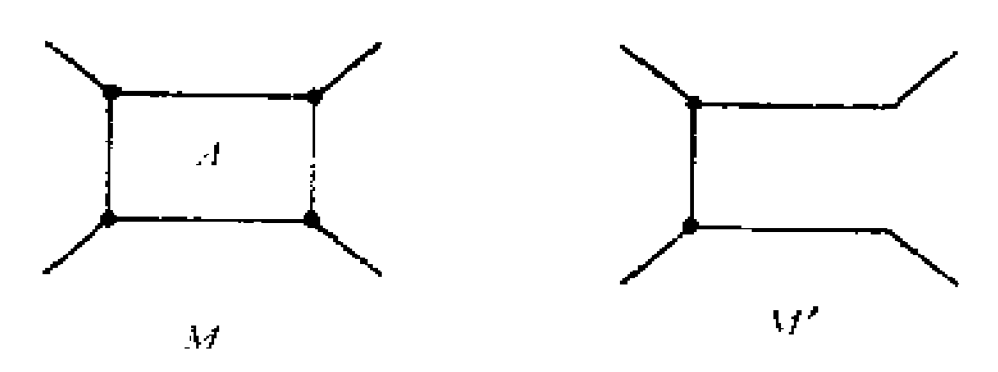


图 14

域 A 为四边形的情形.(在 A 为四边形时,可以有一个相邻的区域与 A 的不相邻的两边相

接壤，如图15中的B.若消去图15中区域A与B的两公共边界中的任一个，则A与B合并成的区域不是多边形.但在这种情况下，根据约当定理，与A的另两条边相邻的区域必定是两个相异的区域，如图15中的C与D.我们可以去掉A与C或A与D的公共边界，则A与C或A与D合并成的区域仍是多边形.)如果M'能够至多用5种颜色正确地染色，那么M也能够.这是因为至多有4个区域与A相邻，用第5种颜色将A染色，永远是可以作到的.

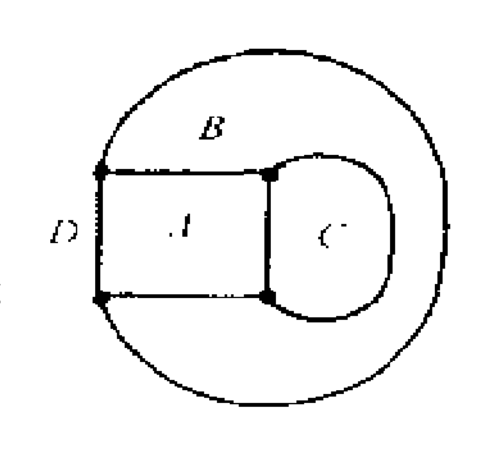


图 15

情形(2)　M包含一个五边形的区域A，参看图16.设把与A相邻的5个区域用B、C、D、E和F表示(其中可以有相同的).总可以在这5个区域中找到互不相接壤(因而不同)的两

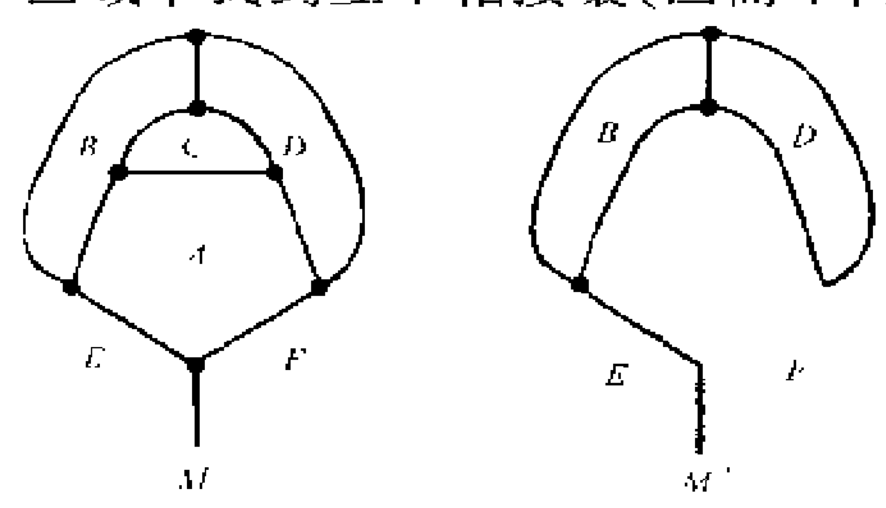


图 16

个区域.例如 B 与 D 相接壤(也可以重合),它们将阻碍着 C 与 E 或 F 相接壤,这是因为从 C 到 E 或 F 的任一条路径,若不准沿边界走,一定会穿过其它三个区域 A、B 与 D 中的至少一个区域(显然,这事实也主要是依据球面上的约当定理.例如在环面上就不然).所以我们可以假设 C 与 F 不相接壤.消去 A 与 C 和 A 与 F 相接壤的边界,将得到一个区域数为 $n-2$ 的正规地图 M'.如果这个新地图 M' 能够用5种颜色正确地染色,那么原来的地图 M 也能够.因为在我们恢复所消去的边界时,C 与 F 是同一个颜色,所以 A 所接壤的区域不会多于 4 种不同的颜色;因而可以用第 5 种颜色将 A 染上.

在任一种情形,对于一个有 n 个区域的正规地图 M,总能够作一个有 $n-1$ 或 $n-2$ 个区域的新正规地图 M',并且如果 M' 能至多用 5 种颜色染色,M 就也能够.这样的办法可以再应用于 M',如此的继续下去,将从 M 得到一串正规的地图:

$$M, M', M'', \cdots$$

因为这一串地图的区域数是逐渐减少的,最后一定可以得到一个地图,它的区域数是 5 或少于 5.这样的最后一个地图总能够至多用 5 种颜色正确地染色.因此,一步一步地往回倒推到 M,M 本身能够至多用五种颜色正确地染色.

这就完成了这五色定理的证明.这个证明是构造性的,即它给出了一个方法,把具有 n 个区域的任意的一个地图,经过有限的步骤,正确地染上色.

3 闭多面形的一般定理和拓扑分类

整个第 2 章只是给出第 1 章末尾所提的问题的解答(定理 2).有了这个解答之后,是否问题都已解决了.用不着再进一步研究呢? 不是的,还自然会发生许多问题的.例如定理 2 是否是定理 1 的最广的推广呢? 又例如我们已经知道有的闭多面形的欧拉示性数是 2,有的是零,但还不知道闭多面形的欧拉示性数究竟是哪些整数.又例如我们还不知道定理 2 的逆定理是否成立.又例如我们说过欧拉定理是从闭多面形分类的考虑发现的,但究竟闭多面形的分类和欧拉示性数有什么关系呢? 第 1 章 §1.4 里我们说过,分类问题的考虑引导欧拉发现了定理 1,本章的目的就是要根据闭多面形的拓扑分类来圆满地解决闭多面形的欧拉示性数的问题.至于我们所得到的定理的应用以及更进一步的问题,这个小册子里就不能讨论了.

第1章里我们正式地证明了定理1.第2章里我们只能从拓扑变换的形象的描写和直观明显的约当定理出发,来证明定理2.本章里说明闭多面形的拓扑分类时,将更多地利用直观;然后在分类的基础上,阐明闭多面形的两条一般定理(定理3和定理4).

§1 具有环柄的球面

1.1 从环面谈起

环面上的两个简单闭曲线 C 和 C',把环面分成两块(图17(a));经过橡皮变形,把其中一块变成挖了两个洞的球面,把另一块变成弯曲的环柄,就得到图17(b)中的图形,称为**具有一个环柄的球面**,记作 S_1.因为环面能经过拓扑变换变成图17(b),所以它也称为具有一个环柄的球面.

同样地,如果在球面上挖了 h (>0)对小

(a) (b) (c)

图 17

洞，再沿着每对小洞的边沿安装上一个环柄，我们就得到**具有 h 个环柄的球面** S_h. 图 17(c)是具有两个环柄的球面 S_2. 为以后叙述方便起见，我们也把球面 S 看成是具有零个环柄的球面 S_0.

约当定理说，球面上的任意一条简单闭折线把球面分成两块. 环面却非如此；即环面上有简单闭折线，例如图 17(a)中的 C，它不把环面分成两块.[1]另一方面，环面上的任意两条不相交的简单闭折线把环面分成两块；而具有两个环柄的球面上却有两条不相交的简单闭折线，不把它分成两块，例如图 17(c)中的 C_1 和 C_2. 一般地说，我们有下面的事实：具有 h 个环柄的球面 S_h 上有 h 条两两不相交的简单闭折线，不能把它分成两块；而它上面的任意 $h+1$ 条这样的简单闭折线却把它分成两块. 我们现在只提出这一事实，不再加以讨论.

1.2 欧拉示性数

定理 2′说，每一个绷在球面上的闭多面形的欧拉示性数是 2. 现在我们还可以说得更多：

定理 2″ 每一个绷在具有 h 个环柄的球

[1] 图 17 中的 C，C_1 或 C_2 都是简单闭曲线. 如果把简单闭曲线看成是若干条弧拼成的，也就是说，如果在简单闭曲线上引进若干个点，把它剖分成若干条弧，我们就得到简单闭折线.

面 S_h 上的闭多面形的欧拉示性数是 $2-2h$.

证明 对于 $h=0$,这就是定理 2′.我们只要考虑 $h>0$ 的情形.

容易承认(但证明超出了本书的范围)具有 $h(>0)$ 个环柄的球面 S_h 上有 h 对简单闭折线 $C_1, C'_1; C_2, C'_2; \cdots; C_h, C'_h$;它们是 S_h 上的 h 个环柄的边沿(参看图 17(c))中的 $h=2$);而且在 S_h 上能绷一个闭多面形 P,使得绷在这些边沿上的是 P 的 h 对简单闭折线(参看图 8;此时 $h=1, C_1, C'_1$ 是两个角上的各一个三边形).承认了这事实,我们就能如下进行.从 P 去掉这 h 个环柄,但仍保留它们的边沿;结果是 P 的绷在挖了 $2h$ 个洞的球面上的部分.根据定理 2′,这部分的欧拉示性数是 $2-2h$.另一方面,每一个环柄是挖了两个洞的球面,因而 P 的绷在每一个环柄上的部分(连同它的边沿)的欧拉示性数是零,P 可以看作是把这两部分沿着边沿重复粘合起来得到的.因为每一个边沿是简单闭折线,它的欧拉示性数是零;所以绷在 S_h 上的任一闭多面形 P 的欧拉示性数是 $2-2h$.

§2 具有交叉帽的球面

2.1 乌比斯带

前节中所谈的每一个具有 $h(\geqslant 0)$ 个环柄

的球面 S_h 都是通常空间中的立体的表面，因而都把空间分为两部分，称为它的外部和内部．我们可以把它朝着它的外部或内部的一侧分别称为外侧或内侧．因为，对于 $h\geqslant0$，具有 h 个环柄的球面 S_h 有外侧和内侧之分，我们把它们都称为**双侧的闭曲面**（注意，这里我们第一次提到闭曲面这个名词）．例如我们可以把一个双侧的闭曲面的一侧涂成红色，另一侧涂成黑色；双侧的闭曲面之所以称为双侧，也可以说是因为它有红侧和黑侧之分．在相同的意义下，空间中一个平面（无限延伸的平面）也是双侧的．

挖了一个洞的双侧的闭曲面还是双侧的；因为它还有红侧和黑侧之分，它的红侧和黑侧除去在洞的边沿处绝不会相遇．在相同的意义下，多边形和环柄也都是双侧的．

我们所以提到上面这些图形的双侧性，就是因为确实有单侧的图形．最简单的单侧图形是乌比斯（A. F. Mödius，1790～1868）首先发现的，称为**乌比斯带**．上一节里我们曾说过：环柄是挖了两个洞的球面，也是弯曲的圆柱形的侧面．但是那圆柱形侧面的最普通的作法，是由粘合长方形纸条 $ABA'B'$（图 18(a)）的边 AB 和边 $B'A'$，使点 A 和 B' 重合，点 B 和 A' 重合而成的；它有两个边沿，顶圆周 $A'CB$ 和底圆周 $B'DA$．现在改变一下环柄的这个作法：先把纸

条折成图 18(b)中的图形,然后再粘合边 AB 和 $A'B'$,使点 A 和 A' 重合,点 B 和 B' 重合,我们就得到乌比斯带(图 18(c)).它有下面的两个特点.它只有一个边沿 $ADB'BCA'$($ADBCA$),由 4 条弧 AD,DB,BC,CA 组成的简单闭折线.它是单侧的;纸条的红黑两侧在乌比斯带上沿着线段 AB(不属于乌比斯带的边沿!)相遇.[①]

2.2 具有交叉帽的球面

乌比斯带也称为**交叉帽**.用这个名称的理由将在后面(§2.3)说明.现在设想取定了一个挖了一个洞的球面(可以经过橡皮变形变成一个多边形)和一个交叉帽.经过橡皮变形,当然可以使洞的边沿和交叉帽的边沿的长度相等.把这两个边沿完全粘合起来;所得到的图形就称为**具有一个交叉帽的球面 Q_1**.

在 Q_1 上可以绷一个闭多面形(闭多面形的定义见第 2 章§1).证明如下.在图 18(a)的长方形纸条的边沿上再加上 E 和 F 两点(图 19(a));现在从图 19(a)得到的交叉帽的边沿是简单闭折线 $AFDBECA$.

---

① 许多通俗读物都提到过乌比斯带的单侧性,例如《十万个为什么》,第 8 册(数学部分),第 1~3 页,少年儿童出版社,1962.

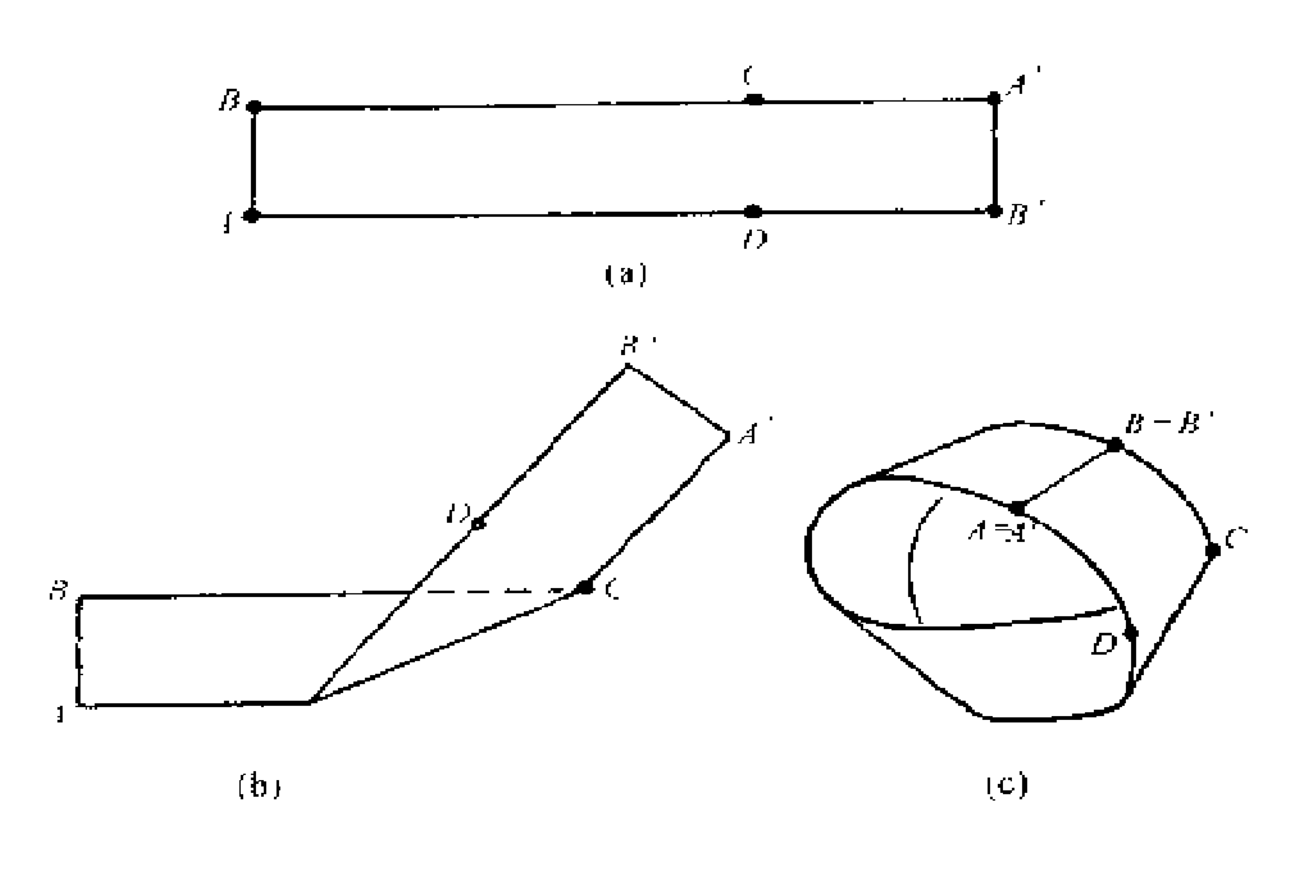


图 18

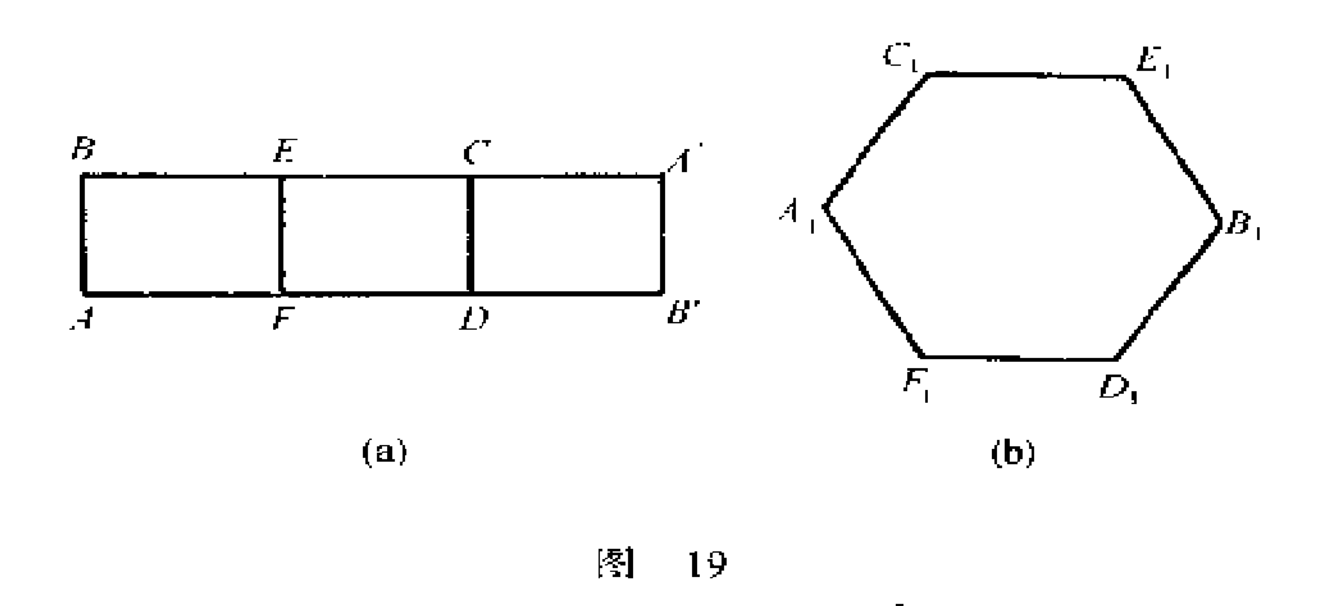


图 19

在挖了一个洞的球面的洞边沿上依次取 $A_1, F_1, D_1, B_1, E_1, C_1$ 六个点，把这挖了一个洞的球面看成一个弯曲的六边形(图 19(b))，经过橡皮变形而成的). 粘合洞边沿和交叉帽边

沿使得点 A 和 A_1 重合，点 F 和 F_1 重合等等.在所得到的具有一个交叉帽的球面上，这时候，就已绷上了一个闭多面形，它的面是 4 个多边形（3 个四边形，1 个六边形）：

$$ABEF, EFDC, CDAB, AFDBEC.$$

留给读者验证这四个多边形的拼合方式满足闭多面形定义中的 4 个条件.

这是把一个交叉帽安装在挖了一个洞的球面上.同样地，可以取定一个挖了 $k(>0)$ 个洞的球面，沿着每一个洞的边沿安装上一个交叉帽，得到一个**具有 k 个交叉帽的球面** Q_k；照样地，可以在 Q_k 上绷一个闭多面形.

读者注意，为以后叙述方便起见，我们不允许 $k=0$，即不把球面看作是具有零个交叉帽的球面.具有一个交叉帽的球面 Q_1 在数学中还称为**射影平面**.

2.3　具有交叉帽的球面的单侧性

我们回到前一节里所说的具有一个交叉帽的球面 Q_1.

首先，我们来说明在通常空间不能作出一个 Q_1. Q_1 的两个组成部分是挖了一个洞的球面 R_1 和交叉帽 R_2（图 18(c)）.把它们的边沿以及粘合后在 Q_1 上出现的简单闭曲线都简单

地记作 l. 上一节里我们已经说明可以在它上面绷一个闭多面形. 但从图 18(c)可以看出, 不论经过 R_1 和 R_2 的什么样的橡皮变形, 都不能在通常空间中沿着 R_2 的边沿 l 粘合上一个 R_1, 使得 R_1 和 R_2 只有公共边沿 l, 而无其它交点(闭多面形定义是这样要求的). 不但从图形看是如此, 还可用数学方法证明, 不论经过什么样的拓扑变换, 也不能把 Q_1 安置在通常空间中, 而只能把 Q_1 安置在四维的欧几里得空间中. 我们这本小册里不能给出这些证明. 但具有一个交叉帽的球面 Q_1 是很具体的; 它既有上面的定义, 又可以从图 19 来认识绷在它上面的闭多面形.

我们现在来说明交叉帽的另一个表示法. 先把作成交叉帽 R_2 的长方形纸条 $ABA'B'$ 上画一条中线 MM' (图 20(a)), 这里 M 和 M' 分别是线段 AB 和 $A'B'$ 的中点. 沿着中线 MM' 把纸条剪开成两张, 同时设想把中线的每一点剪开成两点, 点 M 剪开成点 M 和 M_1 等等; 把这两张的边 $B'M'$ 和边 BM_1 粘合起来成图 20(b); 最后把图 20(b)的边 AM 和边 $A'M'_1$ 粘合起来成图 20(c)中的圆柱形侧面, 以 $ADBC$ 为底圆周, $MGHM_1G_1H_1M$ 为顶圆周. 所以图 20(c)是把交叉帽 R_2 沿着 AMB 和中线

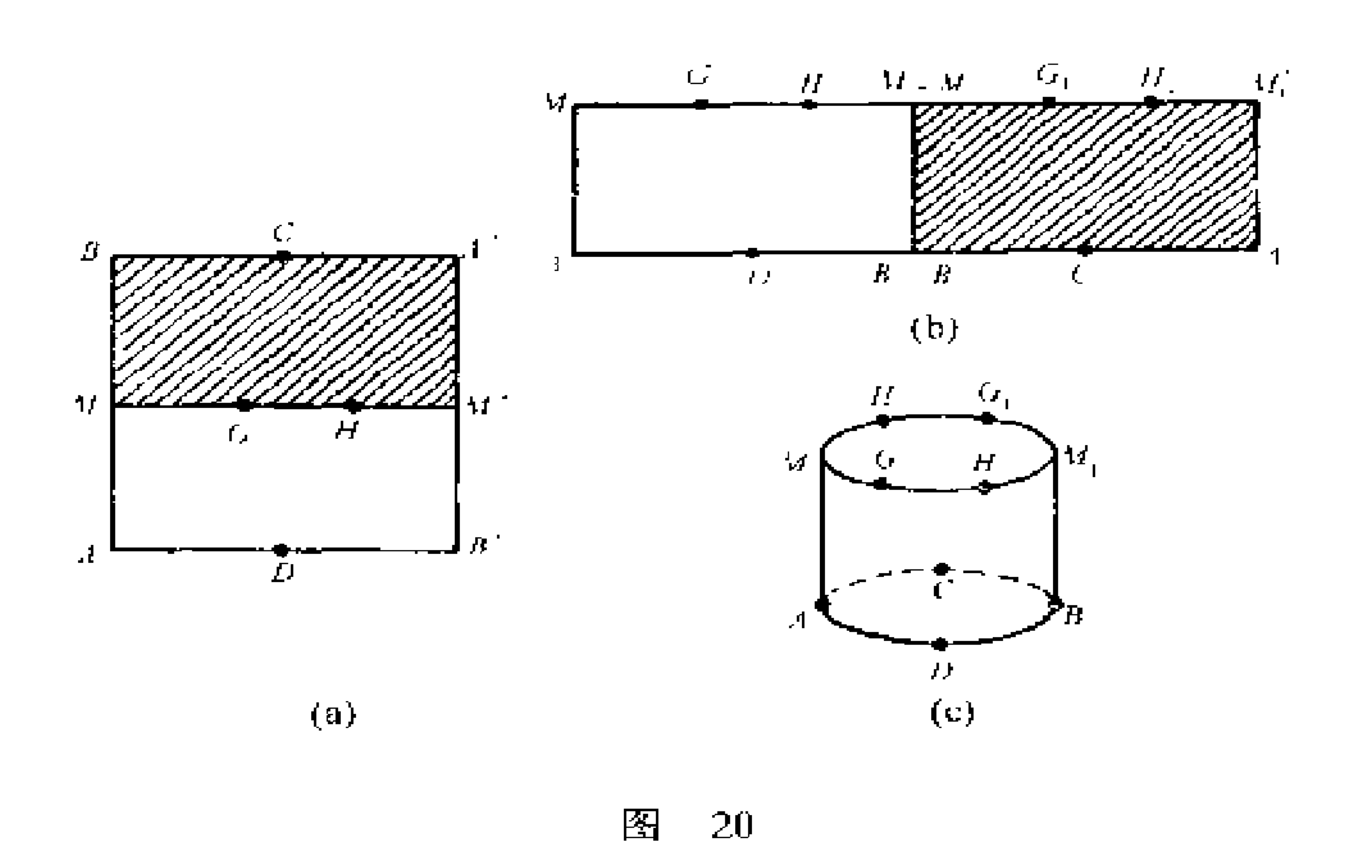


图 20

$MGHM$ 剪开，经过橡皮变形，粘合 AMB 恢复原状后得到的；换句话说，如果再把剪开的中线 $MGHM$ 粘合使恢复原状，即把图 20(c)的顶圆周的每对对径点粘合成一点，我们从图 20(c)得到的图形是从交叉帽 R_2 经过拓扑变换而得到的图形．于是，在粘合图 20(c)的顶圆周的每对对径点的要求下，图 20(c)是交叉帽 R_2 的一个新表示法．(在粘合图 18(a))的对边 AB 与 $A'B'$ 的要求下，图 18(a)是 R_2 的我们的旧表示法．)

这新表示法同时说明了交叉帽这一名称的来源：用圆柱形侧面的材料缝一个帽子，要求把顶圆周每对对径点缝成一点．

把图 20(c)所表示的交叉帽缝上一个圆底 R_1(圆域,即弯曲的四边形 $ADBC$),就得到 Q_1. 从图 20(c)可以看出,因为交叉帽是单侧的,所以 Q_1 也是单侧的.(为什么? 参看习题 2.)

以上所谈的都是 Q_1,即具有一个交叉帽的球面. 同样地,具有 k 个交叉帽的球面 Q_k 上能绷一个闭多面形,不能安置在通常空间中,是单侧的闭曲面.

2.4 欧拉示性数

设 P 是绷在具有 $k(>0)$ 个交叉帽的球面 Q_k 上的一个闭多面形. 用 §1.2 里同样的办法,我们可以得到:绷在 Q_k 上的任一闭多面形 P 的欧拉示性数是 $2-k$

§3 闭多面形的一般定理和拓扑分类

3.1 闭多面形的一般定理

在前两节里我们说明了两大类的闭曲面:双侧的闭曲面 S_h(整数 $h\geqslant 0$)和单侧的闭曲面 Q_k(整数 $k>0$). 根据整数 h 或 k 的不同,前一大类或后一大类又可以分为无穷多个小类. 绷在 S_h 上的任一闭多面形当然是双侧的,绷在

Q_k 上的任一闭多面形也当然是单侧的. 容易承认(证明超出本书范围), 拓扑变换不改变闭多面形的单侧性或双侧性. 然后因为拓扑变换不改变欧拉示性数, 从 §1.2 和 §2.4 的结果, 将得到下述的、包含定理 2 的定理:

定理 3 如果一个闭多面形能经过拓扑变换绷在具有 $h(\geqslant 0)$ 个环柄的球面 S_h 上, 它就是双侧的, 而且它的欧拉示性数就是 $2-2h$. 如果一个闭多面形能经过拓扑变换绷在具有 $k(>0)$ 个交叉帽的球面 Q_k 上, 它就是单侧的, 而且它的欧拉示性数就是 $2-k$.

如果我们还承认(证明超出本书范围)这一事实: 任一闭多面形都能经过拓扑变换, 绷在 S_h 和 Q_k 中的一个闭曲面上, 则根据欧拉示性数和单双侧性都是拓扑性质, 我们得到下述的、包含定理 2 的逆定理的定理:

定理 4 任意一个闭多面形 P 的欧拉示性数是不大于 2 的整数(可以是负的). 如果 P 的欧拉示性数是 2, P 就是双侧的, 能经过拓扑变换绷在球面上. 如果 P 的欧拉示性数是小于 2 的偶数 $2-2n$, P 可以是双侧的, 也可以是单侧的; 而且按照 P 是双侧或单侧的, P 能经过拓扑变换分别绷在 S_n 或 Q_{2n} 上. 如果 P 的欧拉示性数是小于 2 的奇数 $2-k$, P 就是单侧的, 而且能经过拓扑变换绷在 Q_k 上.

这两个定理圆满地解决了关于闭多面形的欧拉示性数问题.

3.2 闭多面形以及闭曲面的拓扑分类

我们先来说明图形分类的一个最简单的例子,圆周的刚体分类.所谓圆周的刚体分类,是指从刚体运动的观点来分类:不论圆周的位置(在这张纸上或那张纸上);按照经过一个刚体运动能或不能把一个圆周挪到和另一个重合起来,我们就说它们同类或不同类.因此,两个圆周是不是同类,按照它们的半径长是否相等,我们说:半径长是圆周的刚体分类的标志.

相仿地,所谓闭多面形的拓扑分类,是指从拓扑变换的观点来分类:按照能或不能经过一个拓扑变换把一个闭多面形绷在另一个闭多面形上,我们就说它们同类或不同类.例如,因为经过拓扑变换,正四面形和正八面形都能绷在球面上,而且球面也能绷在正八面形上,所以经过拓扑变换正四面形能绷在正八面形上;于是正四面形和正八面形同类.因为每一个闭多面形都能经过拓扑变换,绷在 S_h 和 Q_k 中的一个闭曲面上,从上面的例子容易看出,两个闭多面形是否同类,按照它们是否能经过拓扑变换,绷在 S_h 和 Q_k 中的同一个闭曲面上.

上一节里的定理 3 和定理 4 的内容在实际

上是说，闭多面形的欧拉示性数和单侧性或双侧性（示性数和单双侧性这二者联合在一起）是闭多面形的拓扑分类的标志：两个闭多面形如果有相同的欧拉示性数和相同的单侧性或双侧性，它们就是同类的；否则就不是同类的. 所以定理 3 和定理 4 不但圆满地解决了关于闭多面形的欧拉示性数问题，而且也解决了闭多面形的拓扑分类问题.

我们在 §2.1 的开始曾提过一次 S_h 是双侧的闭曲面，在 §2.3 的末尾又提过一次 Q_k 是单侧的闭曲面，然后在 §3 里凡提到闭曲面时，指的都是 S_h 和 Q_k 中的一个. 在这以前我们不曾给闭曲面下过定义，现在我们补出闭曲面的一个简单而又明确的定义如下：一个图形称为**闭曲面**，如果它上面能绷上一个闭多面形. 一方面，根据这个定义，S_h 和 Q_k 当然是闭曲面；另一方面，通常直观所理解的闭曲面，例如有限立体的表面，也符合这个定义. 有了这个定义后，容易看出，上面所说的闭多面形的拓扑分类，实际上就是闭曲面的拓扑分类：S_h 和 Q_k 中每两个不同的闭曲面不同类，任意一个闭曲面恰和 S_h 和 Q_k 中的一个同类.

结 束 语

我们这个小册子第1章的内容,是学过立体几何的读者都能理解的.我们在后两章里企图通过图形来说明拓扑变换;在定理1的基础上,通过定理2,说明关于闭多面形欧拉示性数问题的圆满解答——定理3和定理4;并说明闭多面形以及闭曲面的拓扑分类.如果读者在读完这个小册子后,对于一个数学问题怎样刨根问底、乘胜前进有所领会,对于什么叫做圆满地解决一个数学问题有所领会,那就是这本小册子所期望达到的目的了.

习　　题

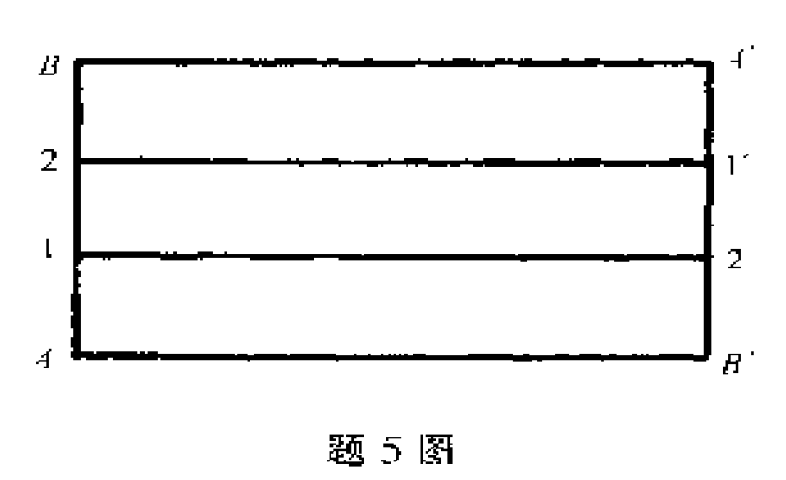
1. 设 P 是 1 个凸多面形. 试证:如果 P 的每一个顶点是至少 3 条棱的公共端点,则 P 的棱的条数不会是 7. 举例说明这里的"每 1 个顶点是至少 3 条棱的公共端点"这个假设不能删去.

2. 试用第 3 章 §2.3 中交叉帽的表示法,说明具有一个交叉帽的球面 Q_1 是单侧的.

3. 补出第 3 章 §2.4 里的命题的说明.

4. 试用若干个四面形和镜框的表面(图 8)作出一系列的、欧拉示性数为零的图形. 能否用若干个具有一个交叉帽的球面和镜框的表面作这种图形?

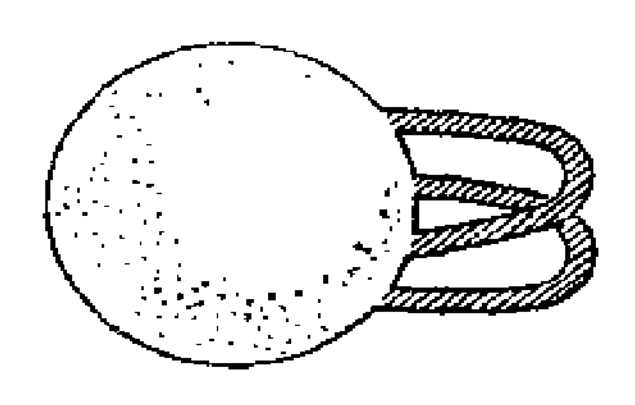
5. 设在长方形纸条 $ABA'B'$ 上画两条直线 $12'$ 和 $21'$,把它分成 3 个相等的小长条(如图). 把 $ABA'B'$ 所粘合成的乌比斯带沿着 $12'$ 和 $21'$ 剪开. 试说明剪开后是怎样的图形.



题 5 图

如果画的是 $n(>2)$ 条直线,剪开后又将会出现什么样的图形?

6. 图(题6图)中的图形是1个圆域缝上了两条弯曲的长方形带子. 试用图说明,它是挖了一个洞的环面经过橡皮变形而成的图形.



题6图

7. 从图2(b)中的正八面形出发,作1个新图形的模型如下. 设正八面形在水平平面上的正方形周是 $ABCD$,高出水平平面的顶点是 N,低于水平平面的顶点是 S,正八面形的中心是 O. 这个新图形是由下列10个三边形拼成的:

$$NBC, NCD, NDA, SAB, SCD, SDA,$$
$$OAN, OAB, OBC, OCS.$$

试说明这新图形是一个乌比斯带,它的边沿是三边形周 NBS.(这个图形是特克曼(B. Tuckermann)作的.)